

Optimasi Penggunaan Koagulan Dalam Proses Penjernihan Air

Tri Juliana Permatasari, Erna Apriliani
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111
E-mail: april@matematika.its.ac.id

Abstrak—Air bersih sangat dibutuhkan untuk kelangsungan hidup dan aktifitas sehari-hari. Air minum sendiri adalah air yang melalui proses pengolahan atau tanpa proses pengolahan yang memenuhi syarat kesehatan dan dapat langsung diminum. Salah satu proses pengolahan air minum adalah proses koagulasi/flokulasi, yakni proses pengumpulan partikel-partikel penyusun kekeruhan yang tidak dapat diendapkan secara gravitasi, menjadi partikel yang lebih besar sehingga dapat diendapkan dengan cara pemberian bahan kimia koagulan. Proses pengolahan air ini dapat diturunkan menjadi suatu model matematika yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa non-linier. Dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai proses linierisasi dan kestabilan model matematika proses pengolahan air. Selain itu, dilakukan simulasi dengan memasukkan kondisi awal dan beberapa parameter untuk mencari respon dari sistem dinamik antara konsentrasi kekeruhan air dengan dosis koagulan. Hasil simulasi yang diperoleh menunjukkan respon dinamik, semakin tinggi tingkat konsentrasi kekeruhan maka semakin besar konsentrasi dosis yang diberikan. Tingkat konsentrasi kekeruhan bergantung pada kondisi akhir dari konsentrasi dosis.

Kata kunci—Optimasi dosis koagulan, linearisasi, kestabilan Routh-Hurwitz

I. PENDAHULUAN

Air bersih sangat dibutuhkan untuk kelangsungan hidup dan aktifitas sehari-hari. Dan sebagian dari penduduk Surabaya telah menerima pelayanan pemenuhan kebutuhan air minum dari Pemerintah Kota Surabaya yang diselenggarakan oleh Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Kota Surabaya. Sehingga untuk memenuhi kebutuhan tersebut, PDAM telah mengoperasikan Instalasi Penjernihan Air Minum (IPAM) di dua lokasi, yakni di Ngagel (Ngagel I, Ngagel II dan Ngagel III) dan di Karangpilang (Karangpilang I, Karangpilang II dan Karangpilang III). Di IPAM Karangpilang II sendiri memiliki kapasitas produksi 10.000 L/detik.

Berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan nomor 492 tahun 2010, air minum sendiri adalah air yang melalui proses pengolahan atau tanpa proses pengolahan yang memenuhi syarat kesehatan dan dapat langsung diminum. Sehingga untuk mengolah air baku tersebut menjadi air bersih yang berkualitas sesuai dengan ketentuan PERMENKES No. 492 Tahun 2010, diperlukan beberapa metode proses pengolahan, baik secara fisis, kimiawi, maupun biologis.

Salah satu proses yang dilakukan untuk pengolahan air baku menjadi air bersih adalah proses koagulasi, yang termasuk dalam metode pengolahan secara kimiawi. Proses koagulasi merupakan proses pengumpulan partikel-partikel penyusun kekeruhan yang tidak dapat diendapkan secara gravitasi, menjadi partikel yang lebih besar sehingga dapat diendapkan dengan cara pemberian bahan kimia koagulan. Kesulitan utama dalam proses koagulasi ini adalah menentukan dosis optimum koagulan (zat pengendap), dalam hal ini aluminium sulfat atau tawas, yang tidak selalu berkolerasi linier terhadap kekeruhan air di tahap akhir koagulasi. Selama ini, untuk mengukur kadar kekeruhan itu sendiri digunakan metode *Jar Test*.

Jar Test adalah proses pengujian dosis koagulan untuk mendapatkan dosis yang tepat dalam skala laboratorium. Karena lingkup kerja dari *Jar Test* ini adalah skala laboratorium, sehingga perbandingan volume air baku yang diteliti dengan volume air baku dalam proses koagulasi adalah 1:1000. Hasil dari *Jar Test* yaitu mendapatkan hubungan antara nilai kekeruhan dan dosis koagulan yang digunakan. Namun, data hasil pengukuran metode *Jar Test* menunjukkan ketidaklinieran antara dua hubungan tersebut.

Dari alasan tersebut, maka pada Tugas akhir ini akan dibahas mengenai optimalisasi dosis koagulan yang harus ditambahkan dalam proses penjernihan air. Sehingga dapat mempermudah proses selanjutnya.

II. DASAR TEORI

A. Air Bersih dan Air Minum

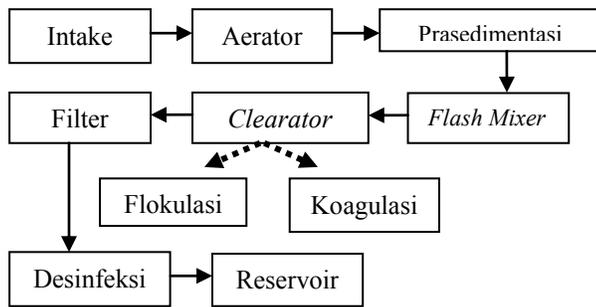
Pengertian Air Bersih berdasarkan Peraturan Pemerintah Republik Indonesia Nomor 16 Tahun 2005 tentang Pengembangan Sistem Penyediaan Air Minum, pada BAB 1 tentang pengembangan sistem penyediaan air minum, Pasal 1, Ayat 1 : Air baku untuk air minum rumah tangga, yang selanjutnya disebut air baku adalah air yang dapat berasal dari sumber air permukaan, cekungan air tanah dan atau air hujan yang memenuhi baku mutu tertentu sebagai air baku untuk air minum.

Terdapat beberapa persyaratan yang harus dipenuhi dalam sistem penyediaan air bersih. Persyaratan yang dimaksud adalah persyaratan kualitatif yang meliputi syarat fisik, kimia, biologis dan radiologis.

B. Pengolahan Air Bersih

Standar kualitas air bersih yang ada di Indonesia saat ini menggunakan Permenkes RI No. 416/Menkes/Per/IX/1990 tentang Syarat- syarat dan Pengawasan Kualitas Air dan PP RI No.82 Tahun 2001 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air, sedangkan standar kualitas air minum menggunakan Kepmenkes RI No. 07/MENKES/SK/VII/2002 tentang Syarat- Syarat dan Pengawasan Kualitas Air Minum.

Sistem pengolahan air bersih ditunjukkan pada Gambar 1 [7].



Gambar 1. Sistem pengolahan air bersih.

1. Intake, proses pemompaan air baku sungai untuk dialirkan ke dalam sumur penyeimbang.
2. Aerator, dimaksudkan untuk meningkatkan kadar oksigen terlarut (DO) dalam air baku, yang disebut proses aerasi. Peningkatan kadar oksigen terlarut tersebut berguna untuk menurunkan kadar besi, mangan, bahan organik, ammonia dan sebagainya.
3. Prasedimentasi, proses ini dimaksudkan untuk mengendapkan partikel diskret atau partikel kasar atau lumpur. Partikel diskret adalah partikel yang tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran selama mengendap di dalam air.
4. *Flash Mixer*, adalah unit pengadukan cepat yang berfungsi untuk melarutkan koagulan ke dalam air sehingga homogen. *Flash Mixer* merupakan bagian dari proses koagulasi-flokulasi.
5. *Clearator*, disinilah proses koagulasi dan flokulasi terjadi, dimana pada proses koagulasi, koagulan dicampur dengan air baku selama beberapa saat hingga merata. Setelah pencampuran ini, maka akan terjadi destabilisasi koloid yang terdapat pada air baku. Koloid yang sudah kehilangan muatannya atau terdestabilisasi mengalami saling tarik menarik sehingga cenderung untuk membentuk gumpalan yang lebih besar.
6. Filter, Bangunan untuk menghilangkan partikel yang tersuspensi dan koloidal dengan cara menyaringnya dengan media filter.
7. Desinfeksi, desinfeksi air minum bertujuan membunuh bakteri patogen yang ada dalam air.

C. Model Matematika

Model matematika proses pengolahan air yang digunakan yakni pada saat proses flokulasi/koagulasi. Dimana volume wadah flokulasi/koagulasi diasumsikan V_f , konsentrasi koloidal pada air *inlet* dan *outlet* diasumsikan terpisah x_{fx} dan

x_{fxi} , dan volume setiap unit reaktor diasumsikan $V_{fi}, i \in [1, a]$, sehingga persamaan parameter terdistribusinya :

$$A\Delta l_{fi} \frac{dx_{fxi}}{dt} = Av_f x_{fxi} - Av_f (x_{fxi} + dx_{fxi}) + Ar(x_{fxi})\Delta l_{fi} \quad (1)$$

Persamaan ini daerah aliran *cross section* diasumsikan A , panjang wadah flokulasi, l_f , dan kecepatan aliran, v_f . Berdasarkan persamaan konversi massa, didapat :

$$V_{fi} \frac{dx_{fxi}(t)}{dt} = qx_{fxi-1}(t) - qx_{fxi}(t) + r_{fi}(t)V_{fi} \quad (2)$$

Dengan $r_{fi}(t)$ laju reaksi flokulasi, jika misalkan partikel semua kecil dan seragam, maka laju reaksi akan menjadi $-\frac{2}{3}m_x n_{fi}^2 d_{fi}^2 G_{fi}$, dengan G_{fi} gradien kecepatan septalium opsional No. i, n_{fi} konsentrasi partikel yang tidak stabil, d_{fi} diameter partikel rata-rata, dan m_x partikel koloid rata-rata. Sehingga persamaan (2) menjadi :

$$V_{fi} \frac{dx_{fxi}(t)}{dt} = qx_{fxi-1}(t) - qx_{fxi}(t) - \frac{2}{3}m_x n_{fi}^2 d_{fi}^2 G_{fi} \quad (3)$$

Bagaimanapun, dalam menentukan jumlah dosis, paling utama ditentukan terlebih dahulu stabilitas koloid, jika dosis cukup, maka $n_{fi} = x_{fxi-1}/m_x$; jika dosis tidak cukup, maka persamaan (2.7), n_{fi} menjadi konsentrasi partikel yang tidak stabil dan $n_{fi} = \frac{K_{xy}x_{fyi-1}}{m_x} \cdot K_{xy}$ laju konsentrasi dosis reaktif untuk kekeruhan, dan ini bergantung pada jenis koagulan.

$$X_{fxi}(s) = \frac{1}{v_{fi}s+q} [qX_{fxi-1}(s) - \frac{2}{3}m_x n_{fi}(s)^2 d_{fi}^3 G_{fi} \quad (4)$$

$$X_{fyi}(s) = \frac{1}{v_{fi}s+q} [qX_{fyi-1}(s) - \frac{2}{3}m_y n_{fyi}(s)^2 d_{fi}^3 G_{fi} \quad (5)$$

Untuk mensimulasi proses koagulasi, $n_{fi} = \min(x_{fxi-1}, K_{xy} \cdot x_{fyi-1})/m_x$. [1]

III. PEMBAHASAN DAN ANALISA HASIL

A. Model Matematika

Model matematika yang digunakan dalam tugas akhir ini diturunkan berdasarkan prinsip konservasi massa yang diterapkan dalam proses pengolahan air dalam wadah koagulasi, yakni sebagai berikut:

$$\frac{dx_{fxi}}{dt} = \frac{qx_{fxi-1}(t) - qx_{fxi}(t)}{V_{fi}} - \frac{2}{3}m_x n_{fi}^2 d_{fi}^3 G_{fi} \quad (6)$$

$$\frac{dx_{fyi}}{dt} = \frac{qx_{fyi-1}(t) - qx_{fyi}(t)}{V_{fi}} - \frac{2}{3}m_y n_{fyi}^2 d_{fi}^3 G_{fi} \quad (7)$$

Persamaan (6) merupakan model dari kekeruhan air, sedangkan untuk model persamaan dosis konsentrasi (dosis koagulan) ditunjukkan oleh persamaan (7).

Untuk menentukan jumlah dosis, hal yang utama adalah menentukan stabilitas koloid, yakni jika dosis cukup, artinya nilai kekeruhan berkisar antara 4-6 NTU, maka $n_{fi} = x_{fxi-1}/m_x$ dan $n_{fyi} = x_{fyi-1}/m_y$. Sedangkan apabila dosis tidak mencukupi (nilai kekeruhan >6NTU), maka $n_{fi} = \frac{K_{xy}x_{fyi-1}}{m_x}$ dan $n_{fyi} = \frac{K_{xy}x_{fyi-1}}{m_y}$.

Karena persamaan (6) dan (7) bersifat simultan, maka persamaan yang akan dikerjakan atau dijalankan pada setiap kondisinya berupa $f_j = f(x_{fx1}, x_{fx2}, x_{fx3}, x_{fy1}, x_{fy2}, x_{fy3})$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Sehingga terbentuk beberapa persamaan untuk masing-masing kondisi. Persamaan-persamaan tersebut berupa persamaan diferensial biasa non-linier. Adapun persamaan untuk kondisi saat dosis mencukupi diberikan sebagai berikut:

$$\dot{x}_{fx_1} = f_1 = \frac{qx_{fx_0} - qx_{fx_1}}{V_{f1}} - \frac{2}{3} G_{f1} \frac{x^2_{fx_0}}{m_x} d^3_{f1} \quad (8)$$

$$\dot{x}_{fx_2} = f_2 = \frac{qx_{fx_1} - qx_{fx_2}}{V_{f2}} - \frac{2}{3} G_{f2} \frac{x^2_{fx_1}}{m_x} d^3_{f2} \quad (9)$$

$$\dot{x}_{fx_3} = f_3 = \frac{qx_{fx_2} - qx_{fx_3}}{V_{f3}} - \frac{2}{3} G_{f3} \frac{x^2_{fx_2}}{m_x} d^3_{f3} \quad (10)$$

$$\dot{x}_{fy_1} = f_4 = \frac{qx_{fy_0} - qx_{fy_1}}{V_{f1}} - \frac{2}{3} G_{f1} \frac{x^2_{fx_0}}{m_y} d^3_{f1} \quad (11)$$

$$\dot{x}_{fy_2} = f_2 = \frac{qx_{fy_1} - qx_{fy_2}}{V_{f2}} - \frac{2}{3} G_{f2} \frac{x^2_{fx_1}}{m_y} d^3_{f2} \quad (12)$$

$$\dot{x}_{fy_3} = f_3 = \frac{qx_{fy_2} - qx_{fy_3}}{V_{f3}} - \frac{2}{3} G_{f3} \frac{x^2_{fx_2}}{m_y} d^3_{f3} \quad (13)$$

Sedangkan persamaan-persamaan untuk kondisi saat dosis tidak mencukupi adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}_{fx_1} = g_1 = \frac{qx_{fx_0} - qx_{fx_1}}{V_{f1}} - \frac{2}{3} G_{f1} K^2_{xy} \frac{x^2_{fy_0}}{m_x} d^3_{f1} \quad (14)$$

$$\dot{x}_{fx_2} = g_2 = \frac{qx_{fx_1} - qx_{fx_2}}{V_{f2}} - \frac{2}{3} G_{f2} K^2_{xy} \frac{x^2_{fy_1}}{m_x} d^3_{f2} \quad (15)$$

$$\dot{x}_{fx_3} = g_3 = \frac{qx_{fx_2} - qx_{fx_3}}{V_{f3}} - \frac{2}{3} G_{f3} K^2_{xy} \frac{x^2_{fy_2}}{m_x} d^3_{f3} \quad (16)$$

$$\dot{x}_{fy_1} = g_4 = \frac{qx_{fy_0} - qx_{fy_1}}{V_{f1}} - \frac{2}{3} G_{f1} K^2_{xy} \frac{x^2_{fx_0}}{m_y} d^3_{f1} \quad (17)$$

$$\dot{x}_{fy_2} = g_5 = \frac{qx_{fy_1} - qx_{fy_2}}{V_{f2}} - \frac{2}{3} G_{f2} K^2_{xy} \frac{x^2_{fx_1}}{m_y} d^3_{f2} \quad (18)$$

$$\dot{x}_{fy_3} = g_6 = \frac{qx_{fy_2} - qx_{fy_3}}{V_{f3}} - \frac{2}{3} G_{f3} K^2_{xy} \frac{x^2_{fx_2}}{m_y} d^3_{f3} \quad (19)$$

B. Analisis Dinamik

Untuk melakukan linearisasi, terlebih dahulu ditentukan terlebih dahulu titik setimbang dari persamaan (8)-(19). Titik setimbang dari sistem dinamik di atas diperoleh dari $\frac{dx_{fx_1}}{dt} = 0, \frac{dx_{fx_2}}{dt} = 0, \frac{dx_{fx_3}}{dt} = 0, \frac{dx_{fy_1}}{dt} = 0, \frac{dx_{fy_2}}{dt} = 0$ dan $\frac{dx_{fy_3}}{dt} = 0$ untuk masing-masing kondisi. Sehingga diperoleh titik setimbang $E^* = (x^*_{fx_1}, x^*_{fx_2}, x^*_{fx_3}, x^*_{fy_1}, x^*_{fy_2}, x^*_{fy_3})$ untuk kondisi saat dosis mencukupi dan $F^* = (x^*_{fx_1}, x^*_{fx_2}, x^*_{fx_3}, x^*_{fy_1}, x^*_{fy_2}, x^*_{fy_3})$ untuk kondisi saat dosis tidak mencukupi.

Langkah selanjutnya adalah dengan melakukan linearisasi persamaan (8)-(19), linearisasi dilakukan di masing-masing kondisi dengan menggunakan matriks *Jacobian*.

Selanjutnya titik setimbang yang sebelumnya diperoleh disubstitusikan ke matriks *Jacobian*.

Untuk kondisi saat dosis mencukupi titik setimbang $E^* = (x^*_{fx_1}, x^*_{fx_2}, x^*_{fx_3}, x^*_{fy_1}, x^*_{fy_2}, x^*_{fy_3})$ disubstitusikan dan diperoleh :

$$\bar{J}^* = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & A_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6 & 0 & 0 \\ A_7 & 0 & 0 & A_8 & A_9 & 0 \\ 0 & A_{10} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \quad (20)$$

dengan,

$$A_1 = -\frac{q}{V_{f1}} \quad A_7 = -\frac{4}{3} G_{f2} \frac{x^*_{fx_1}}{m_y} d^3_{f2}$$

$$A_2 = \frac{q}{V_{f2}} - \frac{4}{3} G_{f2} \frac{x^*_{fx_1}}{m_x} d^3_{f2} \quad A_8 = \frac{q}{V_{f2}}$$

$$A_3 = -\frac{q}{V_{f2}}$$

$$A_4 = \frac{q}{V_{f3}} - \frac{4}{3} G_{f3} \frac{x^*_{fx_2}}{m_x} d^3_{f3}$$

$$A_5 = -\frac{q}{V_{f3}}$$

$$A_6 = -\frac{q}{V_{f1}}$$

$$A_9 = -\frac{q}{V_{f2}}$$

$$A_{10} = -\frac{4}{3} G_{f3} \frac{x^*_{fx_2}}{m_y} d^3_{f3}$$

$$A_{11} = \frac{q}{V_{f3}}$$

$$A_{12} = -\frac{q}{V_{f3}}$$

Sehingga dari sini, diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{fx_1} \\ \dot{x}_{fx_2} \\ \dot{x}_{fx_3} \\ \dot{x}_{fy_1} \\ \dot{x}_{fy_2} \\ \dot{x}_{fy_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q}{V_{f1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{V_{f2}} - \frac{4}{3} G_{f2} \frac{x^*_{fx_1}}{m_x} d^3_{f2} & -\frac{q}{V_{f2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{V_{f3}} - \frac{4}{3} G_{f3} \frac{x^*_{fx_2}}{m_x} d^3_{f3} & -\frac{q}{V_{f3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{V_{f1}} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} G_{f2} \frac{x^*_{fx_1}}{m_y} d^3_{f2} & 0 & 0 & \frac{q}{V_{f2}} & -\frac{q}{V_{f2}} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} G_{f3} \frac{x^*_{fx_2}}{m_y} d^3_{f3} & 0 & 0 & \frac{q}{V_{f3}} & -\frac{q}{V_{f3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{fx_1} \\ x_{fx_2} \\ x_{fx_3} \\ x_{fy_1} \\ x_{fy_2} \\ x_{fy_3} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sedangkan untuk kondisi saat dosis tidak mencukupi, titik setimbang $F^* = (x^*_{fx_1}, x^*_{fx_2}, x^*_{fx_3}, x^*_{fy_1}, x^*_{fy_2}, x^*_{fy_3})$ disubstitusikan ke matriks *Jacobian*, dengan

$$A_1 = -\frac{q}{V_{f1}} \quad A_7 = -\frac{4}{3} G_{f3} K^2_{xy} \frac{x^*_{fy_2}}{m_x} d^3_{f3}$$

$$A_2 = \frac{q}{V_{f2}} \quad A_8 = -\frac{q}{V_{f1}}$$

$$A_3 = -\frac{q}{V_{f2}} \quad A_9 = \frac{q}{V_{f2}} - \frac{4}{3} G_{f2} K^2_{xy} \frac{x^*_{fy_1}}{m_y} d^3_{f2}$$

$$A_4 = \frac{q}{V_{f2}} - \frac{4}{3} G_{f2} K^2_{xy} \frac{x^*_{fx_1}}{m_x} d^3_{f2} \quad A_{10} = -\frac{q}{V_{f2}}$$

$$A_5 = \frac{q}{V_{f3}} \quad A_{11} = \frac{q}{V_{f3}} - \frac{4}{3} G_{f3} K^2_{xy} \frac{x^*_{fy_2}}{m_y} d^3_{f3}$$

$$A_6 = -\frac{q}{V_{f3}} \quad A_{12} = -\frac{q}{V_{f3}}$$

Untuk kondisi saat dosis tidak mencukupi, sistem dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{q}{V_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{V_2} & -\frac{q}{V_2} & 0 & -\frac{4}{3}G_2K^2_{xy}\frac{y_1^*}{m_x}d_2^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{V_3} & -\frac{q}{V_3} & 0 & -\frac{4}{3}G_3K^2_{xy}\frac{y_2^*}{m_x}d_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q}{V_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q}{V_2}-\frac{4}{3}G_2K^2_{xy}\frac{y_1^*}{m_y}d_2^3 & -\frac{q}{V_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{q}{V_3}-\frac{4}{3}G_3K^2_{xy}\frac{y_2^*}{m_y}d_3^3 & -\frac{q}{V_3} \end{bmatrix} \dots(22)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{P_3P_4 - P_2P_5}{P_3} \\ B_3 &= \frac{P_5P_6}{P_5} = P_6 \\ C_1 &= \frac{B_1P_3 - B_2P_1}{B_1} \\ C_2 &= \frac{B_2P_5 - B_3P_3}{B_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{C_2B_3}{C_2} = B_3 \\ E_1 &= \frac{D_1C_2 - C_1D_2}{D_1} \\ F_1 &= \frac{E_1D_2}{E_1} = D_2 \end{aligned}$$

Untuk menganalisis kestabilan dari titik setimbang, langkah selanjutnya yang harus dilakukan adalah menentukan nilai-nilai karakteristik dari matriks *Jacobian*. Nilai karakteristik tersebut merupakan akar-akar karakteristik dari polinomial $h(s) = \text{determinan}(\bar{J}^* - sI)$, dengan I adalah matriks identitas.

Polinomial yang terbentuk untuk kondisi saat dosis mencukupi adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} h(s) &= s^6 + P_1s^5 + P_2s^4 + P_3s^3 + P_4s^2 + P_5s + P_6 \\ \text{dengan memisalkan :} \\ P_6 &= A_1A_3A_5A_6A_9A_{12} \\ P_1 &= -A_1 - A_3 - A_5 - A_6 - A_9 - A_{12} \\ P_2 &= A_9A_{12} + A_1A_9 + A_3A_9 + A_6A_9 + A_5A_9 + A_1A_{12} \\ &\quad + A_3A_{12} + A_5A_{12} + A_6A_{12} + A_1A_3 + A_1A_5 \\ &\quad + A_1A_6 + A_3A_5 + A_3A_6 + A_6A_5 \\ P_3 &= -A_1A_9A_{12} - A_3A_9A_{12} - A_5A_9A_{12} - A_6A_9A_{12} \\ &\quad - A_1A_3A_9 - A_1A_5A_9 - A_1A_6A_9 - A_3A_5A_9 \\ &\quad - A_3A_6A_9 - A_5A_6A_9 - A_1A_3A_{12} \\ &\quad - A_1A_5A_{12} - A_1A_6A_{12} - A_5A_3A_{12} \\ &\quad - A_6A_3A_{12} - A_5A_6A_{12} - A_1A_3A_5 - A_1A_3A_6 \\ &\quad - A_3A_5A_6 - A_1A_5A_6 \\ P_4 &= A_1A_3A_9A_{12} + A_1A_5A_9A_{12} + A_1A_6A_9A_{12} + \\ &\quad A_3A_5A_9A_{12} + A_3A_6A_9A_{12} + A_5A_6A_9A_{12} + A_1A_5A_9A_6 + \\ &\quad A_3A_5A_6A_9 + A_1A_5A_6A_{12} + A_3A_5A_6A_{12} + A_1A_3A_5A_6 + \\ &\quad A_1A_3A_5A_9 + A_1A_3A_6A_9 + A_1A_3A_5A_{12} + A_1A_3A_6A_{12} \\ P_5 &= -A_1A_3A_5A_9A_{12} - A_1A_3A_6A_9A_{12} - A_1A_5A_6A_9A_{12} \\ &\quad - A_3A_5A_6A_9A_{12} - A_1A_3A_5A_6A_9 \\ &\quad - A_1A_3A_5A_6A_{12} \end{aligned}$$

Untuk mempermudah menganalisis kestabilan dengan tanpa menghitung akar-akar karakteristik tersebut, kriteria *Routh-Hurwitz* dapat digunakan, dengan cara melakukan tabulasi sebagai berikut :

Table 1.

Tabulasi *Routh-Hurwitz* kondisi saat dosis mencukupi

s^6	1	P_2	P_4	P_6	0	0
s^5	P_1	P_3	P_5	0	0	0
s^4	B_1	B_2	B_3	0	0	0
s^3	C_1	C_2	0	0	0	0
s^2	D_1	D_2	0	0	0	0
s^1	E_1	0	0	0	0	0
s^0	F_1	0	0	0	0	0

dengan

$$B_1 = \frac{P_1P_2 - P_3}{P_1}$$

$$D_1 = \frac{C_1B_2 - B_1C_2}{C_1}$$

Begitu juga halnya dengan kondisi saat dosis tidak mencukupi, polinomial yang terbentuk seperti di bawah ini :

$$\begin{aligned} h(s) &= s^6 + P_1s^5 + P_2s^4 + P_3s^3 + P_4s^2 + P_5s + P_6 \\ \text{dengan memisalkan :} \\ P_1 &= -A_1 - A_3 - A_6 - A_8 - A_{10} - A_{12} \\ P_2 &= A_{10}A_{12} + A_1A_{10} + A_3A_{10} + A_8A_{10} + A_6A_{10} + A_1A_{12} \\ &\quad + A_3A_{12} + A_6A_{12} + A_8A_{12} + A_1A_3 + A_1A_6 \\ &\quad + A_1A_8 + A_3A_6 + A_3A_8 + A_8A_6 \\ P_3 &= -A_1A_{10}A_{12} - A_3A_{10}A_{12} - A_6A_{10}A_{12} - A_8A_{10}A_{12} \\ &\quad - A_1A_3A_{10} - A_1A_6A_{10} - A_1A_8A_{10} \\ &\quad - A_3A_6A_{10} - A_3A_8A_{10} - A_6A_8A_{10} \\ &\quad - A_1A_3A_{12} - A_1A_6A_{12} - A_1A_8A_{12} \\ &\quad - A_6A_3A_{12} - A_8A_3A_{12} - A_6A_8A_{12} \\ &\quad - A_1A_3A_6 - A_1A_3A_8 - A_3A_6A_8 - A_1A_6A_8 \\ P_4 &= A_1A_3A_{10}A_{12} + A_1A_6A_{10}A_{12} + A_1A_8A_{10}A_{12} + \\ &\quad A_3A_6A_{10}A_{12} + A_3A_8A_{10}A_{12} + A_6A_8A_{10}A_{12} + A_1A_6A_{10}A_8 + \\ &\quad A_3A_6A_8A_{10} + A_1A_6A_8A_{12} + A_3A_6A_8A_{12} + A_1A_3A_6A_8 + \\ &\quad A_1A_3A_6A_{10} + A_1A_3A_8A_{10} + A_1A_3A_6A_{12} + A_1A_3A_8A_{12} \\ P_5 &= -A_1A_3A_6A_{10}A_{12} - A_1A_3A_8A_{10}A_{12} - A_1A_5A_6A_9A_{12} \\ &\quad - A_3A_5A_6A_9A_{12} - A_1A_3A_5A_6A_9 \\ &\quad - A_1A_3A_5A_6A_{12} \\ P_6 &= A_1A_3A_6A_8A_{10}A_{12} \end{aligned}$$

Dan Tabulasi *Routh-Hurwitz* yang terbentuk adalah sebagai berikut:

Table 2.

Tabulasi *Routh-Hurwitz* kondisi saat dosis tidak mencukupi

s^6	1	P_2	P_4	P_6	0	0
s^5	P_1	P_3	P_5	0	0	0
s^4	B_1	B_2	B_3	0	0	0
s^3	C_1	C_2	0	0	0	0
s^2	D_1	D_2	0	0	0	0
s^1	E_1	0	0	0	0	0
s^0	F_1	0	0	0	0	0

dengan

$$B_1 = \frac{P_1P_2 - P_3}{P_1}$$

$$B_2 = \frac{P_3P_4 - P_2P_5}{P_3}$$

$$B_3 = \frac{P_5P_6}{P_5} = P_6$$

$$C_1 = \frac{B_1P_3 - B_2P_1}{B_1}$$

$$C_2 = \frac{B_2P_5 - B_3P_3}{B_2}$$

$$D_1 = \frac{C_1B_2 - B_1C_2}{C_1}$$

$$D_2 = \frac{C_2B_3}{C_2} = B_3$$

$$E_1 = \frac{D_1C_2 - C_1D_2}{D_1}$$

$$F_1 = \frac{E_1D_2}{E_1} = D_2$$

Kriteria *Routh-Hurwitz* menyatakan bahwa banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel di atas menandakan banyaknya akar-akar polinomial $h(s)$ yang bagian realnya negatif. Jadi sistem dinamik pada saat kondisi dosis mencukupi dikatakan stabil apabila nilai dari P_1B_1, C_1, D_1, E_1 dan F_1 semua bernilai positif, karena baik Tabel 1 maupun Tabel 2 menunjukkan $P_0 > 0$, yakni bernilai satu, sehingga pada kolom pertama tersebut tidak terjadi perubahan tanda.

Sehingga dengan memasukkan parameter untuk masing-masing kondisi, yakni untuk mencari koefisien-koefisien $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1$ dan F_1 . Maka diperoleh nilai pada kolom pertama tabel di atas bernilai positif semua. Sehingga sistem pada dua kondisi tersebut dalam keadaan stabil.

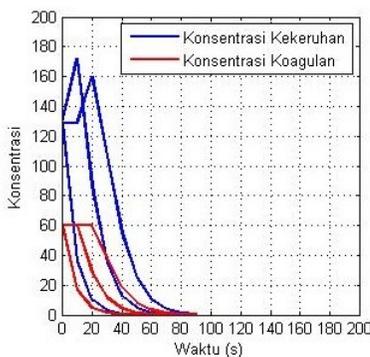
C. Simulasi

Untuk menentukan dosis optimal dilakukan dengan mengamati perilaku respon dinamik yang telah disimulasikan. Simulasi dilakukan dua kondisi awal konsentrasi kekeruhan yang berbeda-beda. Dua kondisi awal tersebut mewakili kondisi kekeruhan yang biasa terjadi pada setiap musim, yakni musim kemarau dan musim penghujan. Simulasi dari masing-masing kondisi awal kekeruhan dilakukan dengan pemberian tiga variasi konsentrasi dosis koagulan yang berjalan dari waktu awal $t_0 = 0$ hingga waktu akhir $t_f = 90$ detik. Adapun nilai-nilai parameter dari sistem dinamik yang digunakan untuk simulasi dinyatakan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Parameter

q (m^3/s)	V_{fi} (m^3)	G_{fi} (s^{-1})	d_{fi} (m)	m_x	m_y	K_{xy}
1.1	1.53	60	10^{-7}	1.25	1.25	1

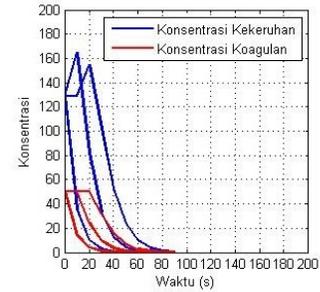
Simulasi pada kasus yang pertama dilakukan dengan menggunakan konsentrasi kekeruhan awal sebesar 129 NTU dengan variasi konsentrasi dosis koagulan sebesar 50 mg/L, 60 mg/L dan 70 mg/L. Hasil simulasi diberikan pada gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3.



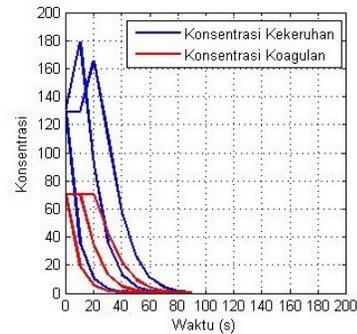
Gambar 1 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 50 mg/L

Berdasarkan Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3 di atas menunjukkan profil konsentrasi kekeruhan yang berubah akibat tiga variasi konsentrasi dosis yang diberikan. Dari masing-masing gambar menunjukkan bahwa konsentrasi kekeruhan tampak mengalami kenaikan saat berada di tahap kedua dan ketiga, tetapi beberapa saat setelah itu terlihat mengalami

penurunan selama proses pengolahan berlangsung. Hal ini dikarenakan adanya restabilisasi partikel koloid yang menyebabkan kenaikan sesaat konsentrasi kekeruhan tersebut. Sedangkan untuk menentukan atau memprediksi dosis optimal dari simulasi yang sudah didapatkan, dilakukan perbandingan perubahan konsentrasi kekeruhan akibat ketiga variasi dosis yang diberikan. Perbandingan tersebut ditinjau dari dua hal, yakni perbandingan antara konsentrasi kekeruhan dengan variasi konsentrasi dosis pada saat waktu ke-n dan ditinjau dari hubungan.



Gambar 2 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 60 mg/L

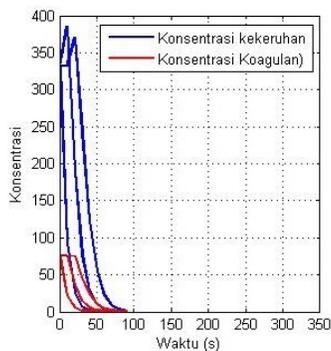


Gambar 3 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 70 mg/L

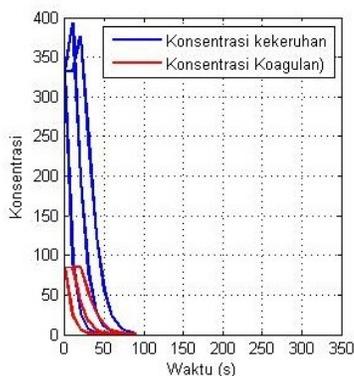
Dari hasil analisis perbandingan tersebut, dosis optimal yang digunakan dalam simulasi pertama sebesar 60 mg/L. Hal ini tampak pada proses kenaikan dan penurunan konsentrasi kekeruhan selama proses berlangsung. Pada saat konsentrasi dosis yang diberikan sebesar 50 mg/L, respon yang diberikan selama proses berlangsung (dalam hal ini berupa penurunan) berlangsung lambat. Hal ini sama ketika konsentrasi dosis yang diberikan kurang dari 50 mg/L. Sedangkan ketika pemberian dosis sebesar 70 mg/L, respon yang diberikan hampir mendekati seperti yang ditunjukkan saat pemberian dosis sebesar 60 mg/L. Tetapi pada saat pemberian dosis sebesar 70 mg/L hasil dari tingkat penurunan konsentrasi kekeruhan yang dihasilkan hanya mempunyai selisih yang sangat tipis dengan pemberian dosis 60 mg/L. Dengan kata lain, tidak memungkinkan juga untuk kondisi konsentrasi kekeruhan sebesar 129 NTU diberikan konsentrasi yang besarnya di atas 70 mg/L.

Pada kasus simulasi yang kedua, konsentrasi kekeruhan awal yang digunakan adalah 332 NTU, dimana konsentrasi tersebut sebagai sampel kondisi kekeruhan pada saat musim penghujan, dengan variasi dosis 75 mg/L, 85mg/L dan

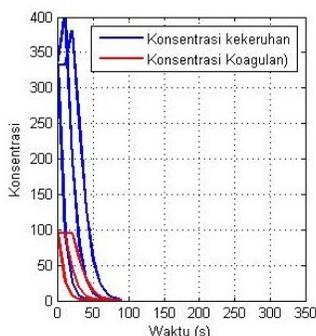
95mg/L. Profil dari masing-masing hasil simulasi tampak pada Gambar 4, Gambar 5 dan Gambar 6 di bawah ini:



Gambar 4 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 75 mg/L



Gambar 5 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 85 mg/L



Gambar 6 Profil Konsentrasi Kekeruhan dengan Pengaruh Dosis 95 mg/L

Respon dinamik pada simulasi kedua ini tampak tidak terlalu berbeda dengan simulasi kasus pertama sebelumnya. Konsentrasi kekeruhan nampak terlihat mengalami penurunan selama proses pengolahan berlangsung, setelah beberapa saat mengalami kenaikan seperti kasus yang pertama. Karena pada dasarnya respon dinamik yang diberikan pada simulasi ini adalah sama. Adapun tujuan dari simulasi ini adalah menentukan atau memprediksi dosis konsentrasi optimal dari nilai konsentrasi awal yang diujikan dengan tiga variasi dosis yang diberikan.

Pada simulasi kasus kedua dengan variasi dosis yang diberikan memiliki perbedaan nilai kenaikan dan penurunan yang kecil. Sehingga untuk menentukan dosis optimal lebih

sulit dibandingkan simulasi pertama. Tetapi dalam simulasi kedua ini saat $t = 30$ s, pada pemberian dosis sebesar 95 mg/L, nilai penurunan setelah terjadi kenaikan tampak mempunyai nilai yang lebih besar dibanding pemberian dosis konsentrasi lainnya. Untuk waktu selanjutnya, tingkat penurunan terlihat hampir sama pada setiap variasi dosis konsentrasi yang diberikan.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan hasil pembahasan, beberapa kesimpulan yang dapat diambil, antara lain :

- Sistem dinamik dari masalah optimasi koagulan dalam proses pengolahan air berupa persamaan diferensial biasa non-linear, sehingga perlu proses linearisasi, sehingga dengan menggunakan kriteria kestabilan *Routh-Hurwit*, dapat dibuktikan bahwa sistem dinamik dari model matematika pengolahan air tersebut bersifat stabil.
- Simulasi untuk menunjukkan perilaku konsentrasi kekeruhan dan dosis koagulan dalam proses pengolahan air diperoleh dengan melalui simulasi numerik dengan metode beda hingga dengan menggunakan *software MATLAB*.
- Hasil simulasi menunjukkan respon dinamik antara konsentrasi kekeruhan dan konsentrasi dosis, yakni konsentrasi kekeruhan bergantung pada kondisi akhir dari konsentrasi dosis, sedangkan konsentrasi dosis terus bergerak menurun selama proses berlangsung.
- Pemberian dosis koagulan selama proses berlangsung terbukti dapat menurunkan konsentrasi kekeruhan air. Semakin tinggi tingkat konsentrasi kekeruhan air, maka semakin besar konsentrasi dosis yang harus diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

- Yufeng, GUO, dkk. 2009. Flocculant dosage optimizing in water treatment based on nonlinear mathematical model. *International Conference on Environmental Science and Information Application Technology* : 288-291.
- Lestarini, R.D. 2012. Kendali temperatur pada proses produksi biodiesel. *Program Studi Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember*.
- Naidu, D.S. 2002. *Optimal Control Systems*. New York : CRC PRESS.
- Subchan, S. dan Zbikowski, R. 2009. *Computational Optimal Control Tools and Practice*. United Kingdom. John Willey and Sons Ltd. Publication.
- Zak, S.H. 2003. *System and Control*. New York : Oxford University Press.
- Narita, K, dkk. 2009. Penerapan jaringan syaraf tiruan untuk penentuan dosis tawas pada proses koagulasi sisten pengolahan air bersih. *Jurusan teknik fisika fakultas teknologi industri institut teknologi sepuluh nopember*.
- Joko, Tri. 2010. *Unit Produksi dalam Sistem Penyediaan Air Minum*. Yogyakarta: Graha Ilmu.